



Probabilidades e Estatística

Soluções de alguns exercícios

2004/05

LEIC + LERCI + LEE

Métodos elementares de estatística descritiva

Exercício 1

- (a) Vamos construir a tabela de frequências utilizando para tal a **regra de Sturges**

$$k = \lceil 1 + \log_2(n) \rceil = \lceil 6.39 \rceil = 7$$

onde k é o número de classes e n a dimensão amostral. Tomando 7 classes, de igual amplitude, podemos organizar os dados na seguinte tabela de frequências:

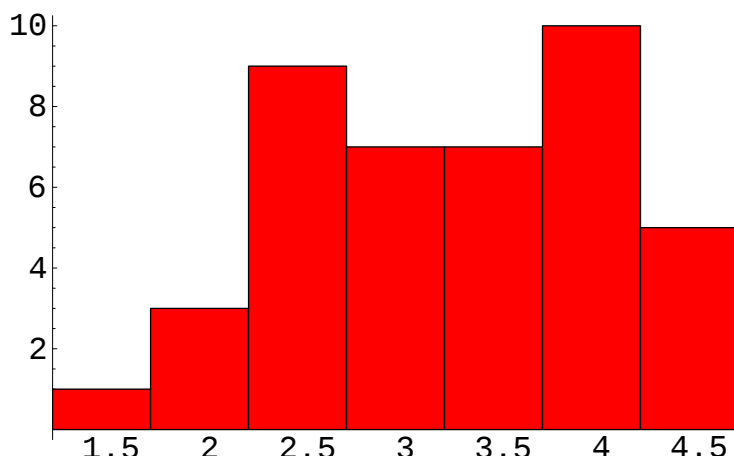
j	C_j	n_j	f_j	N_j	F_j	c_j
1	$[1.2, 1.7[$	1	$\frac{1}{42}$	1	$\frac{1}{42}$	1.45
2	$[1.7, 2.2[$	3	$\frac{3}{42}$	4	$\frac{4}{42}$	1.95
3	$[2.2, 2.7[$	9	$\frac{9}{42}$	13	$\frac{13}{42}$	2.45
4	$[2.7, 3.2[$	7	$\frac{7}{42}$	20	$\frac{20}{42}$	2.95
5	$[3.2, 3.7[$	7	$\frac{7}{42}$	27	$\frac{27}{42}$	3.45
6	$[3.7, 4.2[$	10	$\frac{10}{42}$	37	$\frac{37}{42}$	3.95
7	$[4.2, 4.7]$	5	$\frac{5}{42}$	42	1	4.45

Legenda

- C_j : j -ésima classe
- n_j : frequência absoluta da classe j
- f_j : frequência relativa da classe j
- N_j : frequência absoluta acumulada da classe j
- F_j : frequência relativa acumulada da classe j
- c_j : ponto médio da classe j

Nota: nesta resolução optou-se por se considerar 7 classes; outras soluções igualmente correctas foram propostas nas aulas práticas pelos respectivos docentes.

- (b) O histograma construído com base na tabela de frequências anteriormente apresentada, sendo que em ordenadas figuram as frequências absolutas é da seguinte forma (se figurassem as frequências relativas ou as frequências relativas por unidade de amplitude das classes o gráfico manteria a sua forma gráfica, mudando apenas a escala):



(em abcissa figuram os pontos médios das classes)

- (c) Classe modal $C_6 = [3.7, 4.2[$
 Classe mediana $C_5 = [3.2, 3.7[$

- (d) Média e desvio padrão dos dados agrupados e não agrupados

	$\bar{x}$	s
dados não agrupados	3.16	0.886
dados agrupados	3.235	0.813

Nota: enquanto que para dados não agrupados

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

para dados agrupados

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k c_j n_j = \sum_{j=1}^k \bar{x}_j f_j, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^k (c_j - \bar{x})^2 n_j.$$

Nota: quando no cálculo da variância em vez de se dividir por $n-1$ divide-se por n , temos a *variância corrigida*, que por vezes se denota por s_n^2 .

Exercício 4

- (a) Tome-se $\bar{x}_i$ e $s^{(i)}$ como sendo a média e o desvio padrão da turma i ($i = 1, 2, 3$). Decorre do enunciado que $\bar{x}_1 = 13$, $\bar{x}_2 = 10$, $\bar{x}_3 = 9$, $s^{(1)} = 2$, $s^{(2)} = 2.2$, $s^{(3)} = 2.1$. Usando a ponderação adequada (uma vez que as amostras não têm igual dimensão), vem que

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3} = 10.476.$$

Por outro lado, para determinar

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{30+35+40-1} x_i^2 - \bar{x}^2}{30 + 35 + 40 - 1}$$

temos de determinar as somas do tipo $\sum_i x_i^2$. Note-se que

$$\begin{cases} (s^{(1)})^2 = 4 \implies \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 5186 \\ (s^{(2)})^2 = 2.2^2 \implies \sum_{i=1}^{35} x_i^2 = 3664.56 \\ (s^{(3)})^2 = 2.1^2 \implies \sum_{i=1}^{40} x_i^2 = 3411.99 \end{cases}$$

$$\implies s^2 = \frac{5186 + 3664.56 + 3411.99 - 105 \times (10.476)^2}{104} = 7.11$$

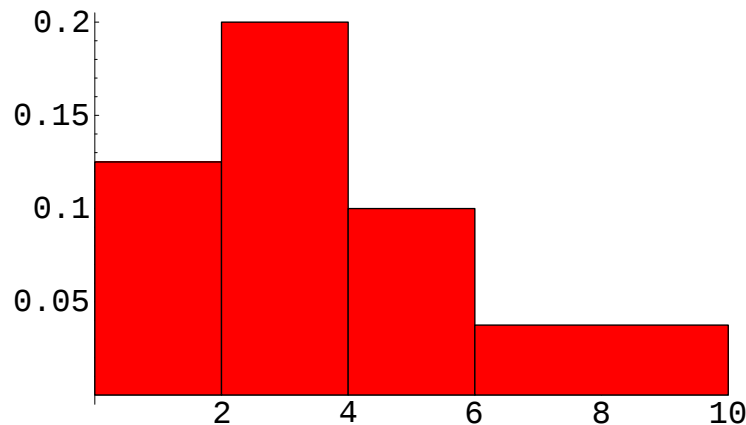
Em particular segue-se que $s = 2.665$.

- (b) Seja x^* a nota do aluno na nova escala, sendo que na escala original a nota, x , é igual a 10 valores. Dado que o professor decide alterar linearmente a nota dos alunos, então a relação entre x^* e x é dada por $x^* = ax + b = 10a + b$, onde a e b são constantes tais que $\bar{x}^* = 12$ e $(s^*)^2 = 2^2$ (respectivamente, média e variância das notas na nova escala). Dado que

$$\bar{x}^* = a\bar{x} + b \quad \wedge \quad (s^*)^2 = a^2 s^2 \Rightarrow a = 0.75, b = 4.143 \Rightarrow x^* = 11.643$$

Exercício 5

- (a) Neste caso em ordenadas (no histograma) figuram as frequências relativas por unidade de amplitude das classes.



- (b) Dado que se trata de dados agrupados, teremos de utilizar as fórmulas correspondentes.

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^3 f_k c_k = 0.25 \times 1 + 0.40 \times 3 + 0.20 \times 5 + 0.15 \times 8 = 3.65$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{119} \left(\sum_{k=1}^3 n_k c_k^2 - 120 \times (3.65)^2 \right) \\ &= \frac{1}{119} (0.25 \times 120 \times 1^2 + 0.40 \times 120 \times 3^2 + 0.20 \times 120 \times 5^2 + 0.15 \times 120 \times 8^2 - 120(3.65)^2) \\ &= 5.17 \end{aligned}$$

Em particular segue-se que $s = 2.27$.

- (c) $me = 3.25$
- (d) Sejam $\bar{x}^*$ e $(s^*)^2$ a média e a variância, respectivamente, dos salários após aumento. Se for dado um aumento de 100%: $\bar{x}^* = 2\bar{x}$, $(s^*)^2 = 2^2 s^2$ (note-se que neste caso $\bar{x}_i^* = 2\bar{x}_i$, onde $\bar{x}_i^*$ é o ponto médio da classe k após aumento de 100%).
- (e) Se for dado um aumento de 2 unidades: $\bar{x}^* = \bar{x} + 2$, $(s^*)^2 = s^2$ (note-se que neste caso $\bar{x}_i^* = \bar{x}_i + 2$).